Devoir Maison

Pour le 6 novembre 2023

Exercice 1

(*Adapté de Ecricome ECS 2016*)

On pourra utiliser sans justification que $2 < e^1 < 3$.

On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. On note pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Pour $n \geqslant 1$ on note $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 lorsque x tend vers 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
   (b) Montrer alors que : $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$.
   (c) Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel γ, appelé **constante d'Euler**.
2. Étudier les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$.
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$, on a :
   $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt$$
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et convergente.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$
   puis que :
   $$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$$
6. Démontrer alors que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = \gamma \ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$$

Exercice 2

(adapté de Banque PT 2022)

Partie I

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $u = (1, -2, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ que l'on notera P puis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, on notera D cette matrice.
4. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire A^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Partie II — Jouons au golf

Un joueur de golf, Anthony, s'entraîne sur le premier trou du parcours.

Il réussit le par sur ce trou s'il rentre la balle dans le trou en exactement 4 coups.

Il est au-dessous du par s'il rentre la balle dans le trou en 3 coups maximum et il est au-dessus du par dans les autres cas.

Anthony a constatée que : pour tout entier naturel n,

- si lors du n-ème entraînement, il est au-dessous du par, alors lors de l'entraînement suivant, il reste au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$.
- si lors du n-ème entraînement, il réussit le par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{2}$ et il est au-dessus du par avec la probabilité de $\frac{1}{4}$.
- si lors du n-ème entraînement, il est au-dessus du par, alors lors de l'entraînement suivant, il est au-dessous du par avec la probabilité de $\frac{1}{8}$, il réussit le par avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et il reste au-dessus du par avec une probabilité de $\frac{5}{8}$.

On note A_n, B_n et C_n les événements « Anthony est au-dessous du par lors du n-ème l'entraînement », « Anthony réussit le par lors du n-ème l'entraînement » et « Anthony est au-dessus du par lors du n-ème l'entraînement » et a_n, b_n et c_n leur probabilité respective.

Lors du dernier échauffement, considéré comme l'entraînement numéro 0, Anthony réussit le par.

On a donc $a_0 = c_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

1. Donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1.
2. Donner les valeurs des probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$, $\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1})$ ainsi que $\mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1})$.

   Chaque valeur devra être justifiée par une phrase, éventuellement extraite de l'énoncé.
3. Établir pour tout entier naturel n que $a_{n+1} = \frac{5}{8}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{8}c_n$.
4. Exprimer de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Aucune justification n'est demandée.

Pour tout entier naturel n, on pose $G_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

5. Donner une relation entre G_{n+1}, G_n et la matrice A de la première partie.
6. Donner sans démonstration la relation entre G_n, G_0, A et n.
7. En déduire les valeurs de a_n, b_n et c_n en fonction de n.
8. Que valent $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n$?

   Interpréter le résultat.